ElCoM
ELECTRICAL COMPUTER MECHATRONICS

تقدم لجنة ElCoM الاكاديمية

ملخص لمادة:

معادلات تفاضلية 1

جزيل الشكر للطالبة:

فيحاء الحديدي

1

First order DE

* يوجد ٣ انواع أساسية
1. linear
2. seprable
3. Exact

* يوجد ٣ طرق تؤدي إلى ال ٣ الاساسية
1. Bernoulli ⇐ يؤدي إلى (linear)
2. Homogeneous ⇐ يؤدي إلى (seprable)
3. Not exact ⇐ يؤدي إلى (Exact)

اشكال معادلة كل نوع : (standard form)

1. linear
$$\bar{y} + p(x)y = g(x)$$

2. separable
$$g(x)\,dx = h(y)\,dy$$

3. Exact
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

1. Bernoulli
$$\bar{y} + p(x)y = g(x)\,y^n$$
الجزء يلي مضروب ال (linear)

2. Homogeneous
$$\bar{y} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. not-Exact
$$m(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

خطوات حل كل نوع وطريقة كشفه :

1. linear (نعرفه إذا $\bar{y}$ ومشتقاته أسه (١))
$$\bar{y} + p(x)y = g(x)$$

($1 = \bar{y}$) الإجبار يكون معامل

إذا $\bar{y} \neq 1$ نقسم عليه

٢) معامل y, $g(x)$ ⇐ x فقط

أول شي نطلع

1. $M(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

2. $y = \frac{1}{M(x)}\left(c + \int m(x)\,g(x)\,dx\right)$

2 Separable

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \Longrightarrow \frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\cdot dx$$

① بجمع كل الـ (X) بجهة
كل (Y) بجهة
② ويجب ان يكون dy , dx بالبسط
③ ثم بكامل كل طرف على حدى فقط

3 Exact $\quad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

① أولاً يجب ان يكون بينهم (+) إذا (−) بأخذ عامل مشترك
② M معها dx , N معها dy

إذا اشتقيت (M) بالنسبة ل (Y) و (N) بالنسبة ل (X)
ومتساويات إذاً Exact

① $\boxed{M_y = N_x}$

② $F_x(x,y) = M(x,y) \quad , \quad F_y(x,y) = N(x,y)$

خطوات الحل تكامل ← اشتقاق ← تكامل

1) بكامل الاصل (F_x , F_y)
2) اشتق بالنسبة ل الثابت
3) بكامل الثابت
باكمل بوضح الخطوات

4 Not-Exact $\quad \boxed{M_y \neq N_x}$

① $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ ((Function الـ) بدلالة (X))

② $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ ((Function الـ) بدلالة (Y))

أطلع integrating Factor

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx} \quad , \quad \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\,dy}$$

← اضرب بـ المعادلة بالطرفين لتتحول الى exact ثم بكمل ك خطوات Exact

5 Bernoulli

① $v = y^{1-n}$ → أس y بالمعادلة (n) (نفرض)

* ضروري انا اتأكد انه معامل $y' = 1$ وباقي شروط الـ linear

② $v' = (1-n)\,y^{-n}\,y'$ (نشتق الطرفين)

بدل كل
$v' \leftarrow y'$
$v \leftarrow y$

$(1-n) \leftarrow$ نضربه بحد ال (v) ومع بعد المساواة
ونحذف y^n من آخر حد

* ثم تتحول الى معادلة linear بدلالة (v) ← بحلها على خطوات (linear) ثم آخر شي برجع الفرض (v)

6) Homogeneous

$$\bar{y} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

1) نفرض

$$v = \frac{y}{x}$$

$$y = v x$$

نشتق الطرفين بالنسبة ل (v, x)

$$\bar{y} = v + x\,\bar{v}$$

ونعوض بالمعادلة

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\bar{y} = v + x\bar{v}$$

نفصل (v) عن (x) ونكمل (separable)

Ex) Solve the intial value problem

$$\frac{dy}{dx} - y = \frac{11}{8} e^{-x/3} \qquad y(0) = -1$$

$$\bar{y} - y = \frac{11}{8} e^{-x/3}$$

أول شي نفرضه linear لأنه y, $\bar{y}$ أس = 1

والمعادلة على صورة (standard) : linear

$$p(x) = -1 \quad , \quad g(x) = \frac{11}{8} e^{-x/3}$$

1) $\mu(x) = e^{\int p(x)\cdot dx} = e^{\int -1 \cdot dx} = e^{-x}$

2) $y = \frac{1}{\mu(x)}\left[c + \int \mu(x) g(x) \cdot dx\right]$

$$y = \frac{1}{e^{-x}}\left[c + \int e^{-x} \times \frac{11}{8} e^{-x/3}\right]$$

$$y = \frac{1}{e^{-x}}\left[c + \frac{11}{8}\int e^{-\frac{4}{3}} \cdot dx\right]$$

$$y = \frac{1}{e^{-x}}\left[c + \frac{11}{8} \times -\frac{3}{4} e^{-\frac{4}{3}}\right]$$

$$y = \frac{1}{e^{-x}}\left[c - \frac{33}{32} e^{-\frac{4}{3}}\right] \qquad y(0) = -1 \text{ نعوض النقطة}$$

النقطة لأوجد (c)

$$-1 = \frac{1}{e^{0}}\left[c - \frac{33}{32} e^{0}\right]$$

$$\therefore c = \frac{1}{32}$$

$$\therefore y = \frac{1}{e^{-x}}\left[\frac{1}{32} - \frac{33}{32} e^{-\frac{4}{3}}\right] \quad \#$$

Ex) use the substitution $u = x + y + 3$ to solve

$\boxed{4}$

$$\frac{dy}{dx} = (x+3+y)^2$$

إذا في بالسؤال (substit) نبدأ من عنده

نجعل y (موضوع القانون)

$$u = x + y + 3$$

$$y = u - x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

$$y' = (x+3+y)^2 \xrightarrow{\text{تعويض}} \frac{du}{dx} - 1 = u^2 \longrightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{u^2+1}\, du = \int dx \longrightarrow \tan^{-1} u = x + c$$

بأخذ (tan) للطرفين

$$u = \tan(x+c)$$

نرجع الفرض

$$x + 3 + y = \tan(x+c)$$

$$y = \tan(x+c) - x - 3 \quad \#$$

Ex) Solve the DE $2xy \frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$

① أولاً مش linear لأنه (y^2)
② بحال وجود (+) بين (x, y) صعب افصل بينهم إذاً مش (separable)
③ مش Bernoulli لأنه لازم يكون linear بالأول
④ مش عندو صفة الـ (exact)
⑤ : (Homo)

$$(\div)\, 2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$$

نوزع المقام على البسط

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

① نفرض $\Leftarrow u = \frac{y}{x}$

② نشتق الطرفين

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

③ تعويض في المعادلة

(Separable) نجعل الـ x بجهة و v بجهة

$$u + x\frac{du}{dx} = 2u^{-1} + \frac{3}{2}u$$

$$x\frac{du}{dx} = 2u^{-1} + \frac{3}{2}u - u \longrightarrow x\frac{du}{dx} = 2u^{-1} + \frac{1}{2}u \longrightarrow \frac{1}{\frac{2}{u} + \frac{1}{2}u}\, du = \frac{1}{x}\, dx$$

توحيد المقام

$$\int \frac{2u}{u^2+4}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|u^2+4| = \ln|x|$$

$$\ln\left|\frac{y^2}{x^2} + 4\right| = \ln|x| + c \quad \#$$

Ex) $xy' + 6y = 3xy^{4/3}$

1 ما نفكر ب linear لان $y, y' \neq 1$ الأس

2 لكن لو ما الوجد $y^{3/4}$ كانت linear

: $y^{3/4}$ مخرب ال linear لهيك (Bernoulli)

3 نجعل $y' = 1$: نقسم على (x)

$\div x \Rightarrow y' + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$

$u = y^{1-n} = y^{1-\frac{4}{3}} = y^{-\frac{1}{3}}$

$u' = \frac{-1}{3}y^{-\frac{4}{3}}y'$

$y' \to u'$

$y \to v$

نضرب الكل ب $\frac{-1}{3}$

جزو (y^4)

$\rightarrow u' + \frac{6}{x} * \frac{-1}{3}u = 3 * \frac{-1}{3}$

$u' - \frac{2}{x}u = -1$ (linear)

$p(x) = \frac{-2}{x}$, $g(x) = -1$

1 $\mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x} \cdot dx} = e^{-2\ln|x|} = x^{-2}$

2 $v = \frac{1}{\mu(x)}\left[c + \int \mu(x)\, g(x) \cdot dx\right]$

$v = \frac{1}{x^{-2}}\left[c + \int x^{-2} * -1 \, dx\right]$ $\boxed{v = y^{-\frac{1}{3}}}$ تعويض

$y^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{-2}}\left[c + x^{-1}\right]$ #

$y(x) = \frac{1}{(x + cx^2)^3}$

(8)

Ex) $\overset{M}{(xy)}dx + \overset{N}{(2x^2+3y^2-20)}dy = 0$

التشكر نشجوس Exact

نفحص ال Exact : $\boxed{M_y = N_x}$

(1) $M = xy \Rightarrow M_y = x$

نشتق بالنسبة لـ (y) : x ثابت

$N = 2x^2+3y^2-20 \Rightarrow N_x = 4x$

نشتق بالنسبة لـ (x) : y ثابت

$M_y \neq N_x$

not-Exact ∴

بما أنه طلع not Exact بدي أطلع integrating factor

$\frac{M_y - N_x}{N}$ (للدالة (x) فقط)

$\frac{N_x - M_y}{M}$ (بدلالة (y) فقط)

(1) $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x - 4x}{2x^2+3y^2-20}$ (مشكل طلع بدلالة (x) فقط ∴)

(2) $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{3}{y}$ ✓ بدلالة (y) فقط

اطلع M(y). $\left[M(y) = e^{\int \frac{3}{y}\cdot dy} = e^{3\ln y} = y^3 \right]$

نضرب كل المعادلة بـ $(\cdot y^3)$

$\Rightarrow (xy \cdot y^3)\,dx + (2x^2y^3 + 3y^2\cdot y^3 - 20\cdot y^3)\,dy = 0$

$(xy^4)dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0$ Exact ✓

بدون ما نتأكد واضح ومنه نشتغل على خطوات (exact)

$F_x(x,y) = xy^4 \quad , \quad F_y(x,y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3$

(1) نكامل ← نشتق ← نكامل

نكامل الأصل F_x, F_y ↓ نشتق بعد كاملة ونشتق بالنسبة للثابت ↓ (نكامل الثابت) ↓

$\int \frac{df}{dx}\cdot dx = \int xy^4 \cdot dx = \frac{x^2}{2}y^4 + \underline{h(y)}$ اقرأ بدلالة الثابت (y)

$F(x,y) = \frac{x^2}{2}y^4 + h(y)$

نشتق بالنسبة لـ الثابت (y)

$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy = 2x^2y^3 + h'(y)$

نشتغل الفرض الثاني $F_y(x,y)$ للتعويض مكان : $\frac{df}{dy}\cdot dy$

$\cancel{2x^2y^3} + 3y^5 - 20y^3 = \cancel{2x^2y^3} + h'(y)$

$h(y) = \int (3y^5 - 20y^3)\,dy$

نكامل الطرفين لأوجد h(y)

$h(y) = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4$

$F(x,y) = \frac{x^2}{2}y^4 + h(y) \Rightarrow \frac{x^2}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4$

نعوض h(y)

$F = c \Rightarrow \frac{x^2}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = c$ #

Second order linear

- Homogenous
  - Constant Coefficent
  - Cauchy-Eular
  - Reduction of order
- Non-Homogenous
  - undetermined Cofficent method
  - Variation of Parameter

* الفرق بين [Non-Homo / Homo]

إذا المعادلة = Zero ← Homo

المعادلة = اقتران ≠ Zero ← Non-Homo

$g(x)$

إذًا أول شيء نحدد نوع المعادلة من ثم نختار طريقة الحل حسب النوع كالتالي

Homo

Constant ← تحتوي المعادلة على (ثوابت) Ex $ay''+by'+cy=0$

Cauchy ← تحتوي المعادلة على (متغيرات) Ex $x^2y''+xy'+cy=0$

Reduction ← قانون وطبق

Non-Homo

undetermied ← يحتوي $g(x)$ على إحدى الأشكال التالية

Constant (ثوابت) / Polynomial (كثيرات حدود) / $\sin ax$ / $\cos ax$ / e^{ax}

سواء لوحدهم أو بينهم عملية $(*, -, +)$ (ضرب) (طرح) (جمع)

Ex
$g(x)=\sin x$
$g(x)=e^{3x}\sin 2x$
$g(x)=x^2\cos 7x$
$g(x)=1-e^{2x}-xe^{3-x^2}$

Variation ← أولاً $g(x)$ لا يحتوي على أي من الأشكال الخاصة بـ(undetermied)

ثانياً يوجد عملية قسمة

Ex
$g(x)=\tan x$
$g(x)=\frac{1}{x}$

* خلصنا من أول خطوة ندخل إلى طريقة حل كل نوع على حدى ...

↓

تحديد نوع المعادلة من ثم البدء بطريقة تنسيق.

2

Ex (ثوابت) Constant 1D Homo

$a y'' + b y' + c = 0$

أول خطوة بطلع المميز (Δ) $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta (b^2 - 4ac)$

$b^2 - 4ac > 0$ ← يوجد حلين مختلفين $r_1 \neq r_2$ شكل الحلول

$y_1 = e^{r_1 x}$

$y_2 = e^{r_2 x}$

$b^2 - 4ac = 0$ ← يوجد حلين متشابهين $r_1 = r_2$ شكل الحلول

$y_1 = e^{rx}$

$y_2 = x e^{rx}$

عند تشابه الحلول نضرب ب (x)

$b^2 - 4ac < 0$

يوجد حلول غير حقيقية (Complex) ←

$$\boxed{r = \alpha \pm \beta i}$$

$$\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}_{\beta} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

شكل الحلول

$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

* بحالة تشابه الحلول نضرب ب (x)

* بالـ أسئلة (Higher order) أي ان الدرجة من ثالثة فما فوق تنتمي لنفس الحلول بالأُس مع اختلاف الدرجة فقط وعدد الحلول [عدد الحلول = الدرجة]

بالحل نعوض بالمسألة

$y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to c$ (الثابت)

$\boxed{y^n \to r^n}$

$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ general Solution

* امثلة للتوضيح :-

Ex) $y'' + 4y' + 3y = 0$ ⟶

Homo ∴ تساوي zero

Constant ∴ تحتوي على ثوابت

نعوض $\boxed{y^n \to r^n}$

شكل الحل $\boxed{y = e^{r_1 x}}$

$r^2 + 4r + 3 = 0$

$\Delta > 0$ ∴ يوجد حلين مختلفين

$(r+3)(r+1) = 0$

$\boxed{r_1 = -3}$ $\boxed{r_2 = -1}$

$y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{-x}$ ⟶ $y_{gen} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$ #

3

Ex) $y'' + 4y' + 4y = 0$ $\quad = \text{zero} \therefore \text{Homo}$

$\underline{\text{Constant}}$ النوع

$\Delta = 0 \therefore$ (متشابه)

$\boxed{y^n \to r^n}$ نعوض

$\to r^2 + 4r + 4 = 0$

$(r+2)(r+2) = 0$

$r_1 = r_2 = -2$ (متشابه)

$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = \underline{x}\, e^{-2x}$

$y_{gen} = c_1 e^{-2x} + x c_2 e^{-2x}$ #

---

* $y'' - 2y' + 3y = 0$ $\quad = \text{zero} \therefore \text{Homo}$

$\underline{\text{Constant}}$ النوع

$\Delta < 0 \therefore \text{Complex}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$

$r = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \dfrac{2}{2} \pm \dfrac{\sqrt{-8}}{2}$

نضع ال i مكان السالب ونأخذ جذر الرقم بالموجب

$\Rightarrow \sqrt{-8} = \sqrt{8}\, \underline{i}$

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \underline{2\sqrt{2}}$

$\to 1 \pm \dfrac{2\sqrt{2}}{2} \quad \therefore r = \underbrace{1}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{2}}_{\beta}$

$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \to y_1 = e^{x} \cos \sqrt{2} x$

$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \to y_2 = e^{x} \sin \sqrt{2} x$

$y_{gen} = c_1 e^{x} \cos \sqrt{2} x + c_2 e^{x} \cos \sqrt{2} x$ #

---

* $y'' + 9y = 0$ $\quad = \text{zero} \therefore \text{Homo}$

$\underline{\text{Constant}}$

$r^2 + 9 = 0$

$r^2 = -9 \Rightarrow r = \sqrt{-9} \Rightarrow r = \sqrt{9}\, i$

$\boxed{r = \pm 3i} \to r = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{3i}_{\beta}$

$\Rightarrow y_1 = e^{0} \cos 3x$

$y_2 = e^{0} \sin 3x$

$\Rightarrow y_{gen} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ #

---

* $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ $\quad = \text{zero} \therefore \text{Homo}$

Constant

درجة ثالثة

لو نفس الطريقة

$r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$

$1 - 2 - 5 + 6 = 0$ بالتجريب

$\therefore (r-1)$ أحد العوامل $\to$

$$\begin{array}{r|l} & r^2 - r - 6 \\ \hline r-1 & r^3 - 2r^2 - 5r + 6 \\ & \ominus r^3 \oplus r^2 \\ \hline & -r^2 - 5r + 6 \\ & \oplus r^2 \ominus r \\ \hline & -6r + 6 \\ & \oplus 6r \ominus 6 \\ \hline & \text{zero} \end{array}$$

$(r-1)(r^2 - r - 6) = 0$

$(r-1)(r-3)(r+2) = 0$

$\boxed{r_1 = 1}$ $\quad y_1 = e^{x}$

$\boxed{r_2 = 3}$ $\quad y_2 = e^{3x}$

$\boxed{r_3 = -2}$ $\quad y_3 = e^{-2x}$

$\Rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-2x}$ #

* $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ = zero ∴ Homo (constant) + Higher order (عادي) 4

$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$(r^2+1)(r^2+1) = 0$

$r^2 = -1$, $r^2 = -1$

$r_1, r_2 = \pm i$ → $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$r_3, r_4 = \pm i$ → $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$y_1 = e^0 \cos x$, $y_3 = e^0 x \cos x$

$y_2 = e^0 \sin x$, $y_4 = e^0 x \sin x$

يوجد تشابه ∴ نضرب بـ (x)

$y_{gen} = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x$ #

* IF $y(x) = xe^{3x}$ is a soulution of D.E $y'' + by' + cy = 0$ Find c, b ?!

اولاً Homo Constant ثانياً الحل $y = xe^{3x}$ يوجد (x) اذا يوجد حلين متشابهين $r_1 = r_2$

$\boxed{r = 3}$ ∴ $y = e^{rx}$ والحل مكرر ⇒ $r_1 = r_2 = 3$ ⇒ معادلة تربيعية إذاً

$(r-3)(r-3) = 0$

$(r-3)^2 = 0$ ← فك التربيع (الأول)^2 + 2(الأول)(الثاني) + (الثاني)^2

$r^2 - 6r + 9 = 0$, $\underbrace{-6}_{b}$, $\underbrace{9}_{c}$

$\boxed{b = -6}$ $\boxed{c = 9}$ #

* IF $y = e^{3x} \sin 2x$ is a soulution of $y'' + by' + cy = 0$ Find b, c ?!

أولاً Homo + Constant ثانياً شكل الحل $y = e^{3x} \sin 2x$ مكتوب بشكل

$y = e^{\alpha x} \sin \beta x$

∴ $\boxed{\alpha = 3}$ $\boxed{\beta = 2}$

$r_1, r_2 = \alpha \pm \beta i$

$r = 3 \pm 2i$

$r - 3 = \pm 2i$

$(r-3)^2 = (\pm 2i)^2$

(مباشرة) $(r - \alpha)^2 = -(\beta)^2$

$(r-3)^2 = -(2)^2$

$r^2 - 6r + 9 = -4$

$r^2 \underbrace{-6}_{b} r + \underbrace{13}_{c} = 0$

∴ $\boxed{b = -6}$ $\boxed{c = 13}$

* of a Constant Cofficent linear Homogenouse O.D.E which has characterstic eq ↓ $r^2(r-1)(r^2+4) = 0$

[1] Find the order of this eq ?! (بجمع الأسس) ⇒ $2 + 1 + 2 = 5$

[2] Find the general soulution ?!

$r^2(r-1)(r^2+4) = 0$

$r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$, $r_4, r_5 = 0 \pm 2i$

$y_1 = 1$, $y_2 = x$ (تشابه)

$y_3 = e^x$, $y_4 = \cos 2x$, $y_5 = \sin 2x$

⇒ $y_{gen} = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x$ #

(x^2) معها y''

(x) معها y'

$x^2y'' + xy' + cy = 0$ Ex Cauchy - Eular (c) Homo

أول خطوة نطلع $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta(b^2-4ac)$

$r_1 \neq r_2$

$b^2 - 4ac > 0$ ← يوجد حلين مختلفين شكل الحلول

$y_1 = x^{r_1}$

$y_2 = x^{r_2}$

$b^2 - 4ac = 0$ ← يوجد حلين متشابهين شكل الحلول

$y_1 = x^r$

$y_2 = \ln x \, x^r$

عند تشابه الحلول نضرب ب $(\ln x)$

$b^2 - 4ac < 0$ (Complex)

$\boxed{r = \alpha \pm \beta i}$

شكل الحلول

$y_1 = x^{\alpha} \cos \beta \ln x$

$y_2 = x^{\alpha} \sin \beta \ln x$

* حال تشابه الحلول نضرب ب $(\ln x)$

* في أسئلة ال (Higher-order) نشتق ال (y) ل عدد الدرجة ونعوض بأصل المسألة

ولتصبح المسألة من (Constant Coefficient) نعوض y^n ← r^n

* في أسئلة ال (Second-order) فقط

نستخرج من المعادلة a, b, c من ثم على القانون :-

$ar^2 + (b-a)r + c = 0$

قانون خاص (Second فقط)

Ex) $x^2y'' + 5xy' + 6y = 0$ $\quad$ ($x^2 \to a$, $5 \to b$, $6 \to c$)

$= zero$ ∴ Homo → متغيرات ∴ Cauchy

$\boxed{a=1}$ $\boxed{b=5}$ $\boxed{c=6}$

Second ∴ على القانون

$ar^2 + (b-a)r + c = 0$

$r^2 + 5r + 6 = 0$

$\Delta > 0$ (حلين مختلفين) $\boxed{y = x^r}$ شكل الحل

$(r+3)(r+2) = 0$

$\boxed{r_1 = -3}$ $\boxed{r_2 = -2}$

$y_1 = x^{-3}, \; y_2 = x^{-2}$ $\Rightarrow y_{gen} = c_1 x^{-3} + c_2 x^{-2}$ #

* $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ $= \text{zero} \therefore$ Homo (cauchy)

$\boxed{a=1}\ \boxed{b=5}\ \boxed{c=4}$ $\Delta = 0$ (متشابه)

$r^2 + 4r + 4 = 0$

$(r+2)(r+2) = 0$

$r_1 = r_2 = -2$ متشابه $\Rightarrow y_{gen} = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x$

$y_1 = x^{-2}$, $y_2 = x^{-2} \ln x$

* $x^2y'' + 3xy' + 4y = 0$

$\boxed{a=1}\ \boxed{b=3}\ \boxed{c=4}$ $\Delta < 0$ (complex)

$r^2 + 2r + 4 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$

$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{4 \cdot 3}}{2} i = \underbrace{\frac{-3}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{3}}_{B} i$

$y_1 = x^{-\frac{3}{2}} \cos \sqrt{3} \ln x$

$y_2 = x^{-\frac{3}{2}} \sin \sqrt{3} \ln x$ $\Rightarrow y_{gen} = c_1 x^{-\frac{3}{2}} \cos \sqrt{3} \ln x + c_2 x^{-\frac{3}{2}} \sin \sqrt{3} \ln x$ #

* $y'' + \frac{1}{x^2} y = 0$ y'' معها x^2, y' معها x $\therefore$ نضرب بـ x^2

$x^2y'' + y = 0$ $= \text{zero} \therefore$ Homo (cuchy)

$\boxed{a=1}\ \boxed{b=0}\ \boxed{k=1}$ $\boxed{\Delta < 0}$

$r^2 - r + 1 = 0$ $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

$r = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{B} i$

$\rightarrow y_1 = x^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x$

$\rightarrow y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x$

$y = c_1 x^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x$

* $(x+1)^2 y'' + 6(x+1) y' + 6y = 0$ $= \text{zero} \therefore$ Homo (cuchy)

$\boxed{x+1 = u}$ لتسهيل الحل نفرض ان

$u^2 y'' + 6uy' + 6y = 0$

$\boxed{a=1}\ \boxed{b=6}\ \boxed{c=6}$ $\Delta > 0$

$r^2 + 5r + 6 = 0$

$(r+2)(r+3) = 0$

$\boxed{r_1 = -2}\ \boxed{r_2 = -3}$

$y_1 = u^{-2}$, $y_2 = u^{-3}$ $\xrightarrow{\text{من الفرض}}$ $y_1 = (x+1)^{-2}$, $y_2 = (x+1)^{-3}$

$\therefore y = c_1 (x+1)^{-2} + c_2 (x+1)^{-3}$ #

* $\alpha x^2 y'' + B x y' + y = 0$

$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x$, Find α , B ?!

Homo + Cuchy

شكل الحل

$x^{-2} \Leftarrow y = x^r$

$\boxed{r = -2}$ ∴ بالنويبو $\ln x$

إذاً يوجد تكرار $r_1 = r_2 = -2$

$(r+2)(r+2) = 0$

$(r+2)^2 = 0$ فك التربيع

$r^2 + 4r + 4 = 0$

$\alpha y'' + (B - \alpha) y' + 4 = 0$

$\therefore \boxed{\alpha = 1}$ $B - \alpha = 4$, $B - 1 = 4$ $\therefore \boxed{B = 5}$ #

* $x^3 y''' + x^2 y'' = 0$ = zero ∴ Homo (Cuchy) + Higher order

$y = x^r$

$y' = r x^{(r-1)}$

$y'' = r(r-1) x^{r-2}$

$y''' = r(r-1)(r-2) x^{r-3}$

تعويض $\Longrightarrow$

$x^3 y''' + x^2 y'' = 0$

$\cancel{x^3}(r)(r-1)(r-2) x^r \cancel{x^{-3}} + \cancel{x^2}(r)(r-1) x^r \cancel{x^{-2}} = 0$ $\div x^r$

فكفكة الضرب

$r(r-1)(r - 2 + 1) = 0$

عامل مشترك

$\boxed{r_1 = 0}$ $\boxed{r_2 = r_3 = 1}$

$y_1 = x^0$, $y_2 = x^1$, $y_2 = x \ln x$

تشابه

$\therefore y_{gen} = c_1 + c_2 x + c_3 x \ln x$ #

* تذكير قانون

$a r^2 + (b - a) r + c = 0$

Second order فقط ل

$* \; x y'' + (2+8x) y' + (8+16x) y = 0$ Use $u = xy$ to solve the DE ?! (8)

$u = xy$

$u' = xy' + y$

$u'' = xy'' + \underbrace{y' + y'} \Rightarrow u'' = xy'' + 2y'$

$\underbrace{xy'' + 2y'} + 8xy' + 8y + 16xy = 0$

$u'' + 8(\underline{xy' + y}) + 16xy$

$u'' + 8u' + 16u = 0$ Homo (Constant)

$u^n \to r^n$

$r^2 + 8r + 16 = 0$ $(\Delta = 0)$

$y = e^{rx}$ تكرار

$(r+4)(r+4) = 0$

$r_1 = r_2 = -4$

$y_1 = e^{-4x}, \; y_2 = x e^{-4x} \Rightarrow y_{gn} = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-4x}$ #

ثابت

19

Hamo

Reduction of order (قانون تطبيق)

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x).dx}}{(y_1)^2} . dx \qquad (1)$$

"إذا عُلم p(x) من المعادلة ."

يجب ان تكون المعادلة (Standard) أي ان معامل $y'' = 1$ صحيح !

$$y_2 = y_1 \int \frac{w(x)}{(y_1)^2} . dx \qquad (2)$$

"إذا أُعطت صيغة ال wronskian , p(x) مجهولة "

Wornskian (w)

$$W(y_1, y_2) = c\, e^{-\int p(x).dx}$$

$w = 0$ (depandant)

$w \neq 0$ (indepandant)

شكل السؤال

Find y_2 ?! or Find second linearly ?!

$$W(e^x, x) = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} \quad e^x \times 1 - e^x \times x = e^x - e^x x \quad \text{(indep)}$$

لنشتق كلاً من x , e^x

$$W(e^{5x}, 3e^{5x}) = \begin{vmatrix} e^{5x} & 3e^{5x} \\ 5e^{5x} & 15e^{5x} \end{vmatrix} = e^{5x}.15e^{5x} - 5e^{5x}.3e^{5x}$$

$$= 15e^{10x} - 15e^{10} = \text{zero} \quad \text{(dep)}$$

Ex) If $w(x) = x e^{-2x}$ is a wronskian of $x y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ Find $p(x)$?!

* يجب ان يكون معامل $y'' = 1$

$$y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x} y = 0$$

$$w(x) = c\, e^{-\int p(x).dx}$$

$$\rightarrow x e^{-2x} = c\, e^{-\int \frac{p(x)}{x}.dx} \quad \text{للطرفين (ln)}$$

$$\ln x e^{-2x} = \ln c\, e^{-\int \frac{p(x)}{x}.dx}$$

$$-2x \ln e + \ln x = \ln c + \ln e^{-\int \frac{p(x)}{x}.dx}$$

$$-2x + \ln x = \ln c - \int \frac{p(x)}{x}.dx \quad \text{(اشتقاق الطرفين)}$$

$$-2 + \frac{1}{x} = 0 - \frac{p(x)}{x}$$

$$\frac{p(x)}{x} = 2 - \frac{1}{x} \quad \rightarrow \boxed{p(x) = 2x - 1}$$

* IF $y_1 = e^{x^2}$ For $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ Find y_2 ?! If $W(y_1, y_2) = e^{2x^2}$ $\boxed{10}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{W(x)}{(y_1)^2} \cdot dx$$

$$y_2 = e^{x^2} \int \frac{\cancel{e^{2x^2}}}{\cancel{e^{2x^2}}} \cdot dx \Rightarrow y_2 = x e^{x^2}$$

$\int 1 \cdot dx$

* $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$ IF $\boxed{y_1 = x}$ Find y_2?!

لنجد $p(x)$ إذا مش اول قانون لكن يجب ان تكون standard المعادلة $y'' = 1$

$$y'' + \frac{2x}{x^2} y' - \frac{2y}{x^2} = 0 \qquad \boxed{p(x) = \frac{2}{x}}$$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) \cdot dx}}{(y_1)^2} \cdot dx$$

$$\Rightarrow -\int p(x) \cdot dx = -\int \frac{2}{x} \cdot dx = -2\ln|x|.$$

$$\Rightarrow y_2 = x \int \frac{e^{-2\ln|x|}}{x^2} \cdot dx \Rightarrow y_2 = x \int \frac{x^{-2}}{x^2} \cdot dx$$

$$y_2 = x \int x^{-4} \cdot dx$$

$$\therefore y_2 = \frac{-1}{3} x^{-2} \quad \#$$

Ex) Given that $y_1(x) = e^x$ is solution to the DE $xy'' - (1+x)y' + y = 0$, write the general solution ?!

① Standard ($y'' = 1$) $\Rightarrow y'' - \left(\frac{1+x}{x}\right) y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow p(x) = -\left(\frac{1+x}{x}\right)$

$$-\int p(x) \cdot dx = -\int -\left(\frac{1+x}{x}\right) \cdot dx$$

$$\boxed{= \ln|x| + x}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) \cdot dx}}{(y_1)^2} = e^x \int \frac{e^{\ln|x| + x}}{e^{2x}}$$

نفك الجمع والضرب

$$\Rightarrow e^x \int \frac{e^{\ln x} \cdot e^x}{e^{2x}} \cdot dx \Rightarrow e^x \int x e^{-x} \cdot dx$$

اجزاء

du	v
x (+)	e^{-x}
1 (−)	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$y_2 = e^x \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right)$$

$$y_2 = \cancel{e^x} \cancel{e^{-x}} (-x-1) \quad \therefore y_2 = -(x+1)$$

$$y_{general} = c_1 e^x + c_2 (x+1)$$

سواء وضعت (-) اولاً صح الحل (ما تقلق ☺)

[II]

Non - Homo [I] Undetermied

الدالة $\neq$ Zero

* $g(x)$ يحتوي على احد الفورمات الاربعة (Poly / Exp / Cos / sin)

* خطوات حل معادلة Non-Homo شبرلام

[1] نحل المعادلة على اساس انها Homo اي انه $g(x)=0$ وبسمي الحل y_c

[2] نحل الجزء المتبقي ال $g(x)$ Undetermied / Variation ونسمي الحل y_p

[3] $y_p + y_c$ = general Soultion

أولاً حل (undetermied) ⇐

$g(x) \xrightarrow{\text{نستبدل}} y_p$

[1] Constant $2 \to A$, $-5 \to B$

[2] Polynomial
[1] linear $(x+1) \to A_1x + A_2$
[2] Quadratic $(x^2+2x+1) \to A_1x^2 + A_2x + A_3$
[3] cubic $(x^3+1) \to A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$

[3] Sin, Cos
[1] $\cos 3x \to A_1\cos 3x + A_2\sin 3x$
[2] $-3\sin 2x \to A_1\sin 2x + A_2\cos 2x$

[4] Exp
[1] $3e^{2x} \to Ae^{2x}$
[2] $\frac{1}{5}e^{-3x} \to Ae^{-3x}$

(أول ما اطلع y_p نتحقق نظرة على الحلول بحال تشابه نضرب بال(x) قبل عملية الاشتقاق)

* مهم جداً بعد ايجاد الحلول نتأكد انه لا يوجد تكرار (تشابه) بحال التشابه نضرب ب (x)

* Combination :-

[1] $x\cos 5x \to (A_1x+A_2)\cos 5x + (A_3x+A_4)\sin 5x$

[2] $x^2\sin 3x \to (A_1x^2+A_2x+A_3)\sin 3x + (A_4x^2+A_5x+A_6)\cos 3x$

[3] $xe^{4x} \to (A_1x+A_2)e^{4x}$

[4] $e^{2x}\sin 3x \to A_1e^{2x}\sin 3x + A_2e^{2x}\cos 3x$

[5] $xe^{2x}\cos 5x \to (A_1x+A_2)e^{2x}\cos 5x + (A_3x+A_4)e^{2x}\sin 5x$

* بحالة الجمع او الطرح نستبدل كل وحدة على حدى ثم نجمع.. $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \dots$

Ex) $y'' - 5y' + 6y = x+1$ $\quad \neq$ zero $\therefore$ Non Homo (Undetermied (من جهة الخطأ $(x+1)$) $\boxed{12}$

$\boxed{1}$ $y'' - 5y' + 6y = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$(r-2)(r-3) = 0$

$\boxed{r_1 = 2}$ $\boxed{r_2 = 3}$

$y_1 = e^{2x}, \; y_2 = e^{3x}$

$$\boxed{y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

$\boxed{2}$ $g(x) = x+1$

$y_p = A_1 x + A_2$ (لايوجد تشابه مع الحل)

$y' = A_1$

$y'' = 0$

$\Rightarrow y'' - 5y' + 6y = x+1$

$0 - 5(A_1) + 6(A_1 x + A_2) = x+1$

$-5A_1 + 6A_1 x + 6A_2 = x+1$

لإيجاد المجاهيل نقارن حدّ مع حدّ ...

$6A_1 x = x$

$6A_1 = 1 \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{1}{6}}$

$-5A_1 + 6A_2 = 1$

$-5\left(\frac{1}{6}\right) + 6A_2 = 1 \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{11}{36}}$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{6}x + \frac{11}{36}}$$

$\Rightarrow y_{gen} = y_c + y_p$

$\Rightarrow c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x + \frac{11}{36}$ #

$y'' - 2y' + y = e^x$ $\quad$ Dont say Constant

$\boxed{1}$ $y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = 0$

$r_1 = r_2 = 1$

$y_1 = e^x, \; y_2 = x e^x$

$y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$\boxed{2}$ $g(x) = e^x$

$y_p = x^2 A e^x \longrightarrow$ Dont بوضع صفر بحالة

بسبب التشابه مع الحل

$y' = A(x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x)$

$y'' = A(x^2 \cdot e^x + e^x \cdot 2x + e^x \cdot 2 + 2x \cdot e^x) = A(x^2 e^x + 4x e^x + 2e^x)$

$y'' - 2y' + y = e^x$

$\cancel{Ax^2e^x} + \cancel{A4xe^x} + A2e^x - \cancel{2Ax^2e^x} - \cancel{4Axe^x} + \cancel{x^2Ae^x} = e^x$

$2Ae^x = e^x$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x}$$

$y_g = y_c + y_p$ #

2 Non-Homo

Variation of Parameter ($g(x)$ لا يحتوي على احد من الجوعات الاربعة)

يوم لعملية قسمة + Cauchy-Eular (اضيغات) بحالة Non-Homo

قبل البدا في الحل يجب التأكد ان المعادلة Standard معامل $y''=1$

الخطوات

1. بوم Homo منضل y_1, y_2 $g(x)=0$ لنيحل الحل y_c
2. بوم Wronskian $W(y_1, y_2)$
3. $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$$u_1 = -\int \frac{y_2\, g(x)}{W}\,dx$$

$$u_2 = \int \frac{y_1\, g(x)}{W}\,dx$$

(مهم) $g(x)$ وبعد ال Standard

4. الحل العام

$$y = \underbrace{y_c}_{\text{Homo}} + y_p$$

Ex) $y'' + y = \tan x$ standard ✓ $\neq$ zero $\therefore$ Non-Homo

Variation : قسمة

1) $r^2 + 1 = 0$

$r^2 = -1$

$r = \underbrace{0}_{\alpha} \pm \underbrace{1}_{\beta} i$

$y_1 = e^0 \cos x$

$y_2 = e^0 \sin x$

$$\Rightarrow \boxed{y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x}$$

2) $W(y_1, y_2) =$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

3) $$u_1 = -\int \frac{y_2\, g(x)}{W} = -\int \sin x \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\sin^2}{\cos x} = -\int \frac{1-\cos^2}{\cos x} = -\ln|\sec + \tan x| + \sin x$$

$$u_2 = \int \frac{y_1\, g(x)}{W} = \int \cancel{\cos x} \frac{\sin}{\cancel{\cos}} = -\cos x$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (-\ln|\sec + \tan x| + \sin x)\cos x - \cos x \sin x$$

$$\boxed{y_{gen} = y_c + y_p}$$

* فكرة سؤال جديدة جداً وردت في الامتحانات (مهمة)

Ex) Find the general Soultion of $y^{(4)}+4y=0$

$\rightarrow y^{(4)}+4y=0 \Rightarrow r^4+4=0 \Rightarrow (r^2)^2-(2i)^2=0 \Rightarrow (r^2-2i)(r^2+2i)=0$

$\Downarrow \quad r=\pm\sqrt{2i} \qquad \Downarrow \quad r=\pm\sqrt{-2i}$

$\rightarrow \sqrt{2i} = \left(2e^{i\pi/2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{1+i}$

$\rightarrow \sqrt{-2i} = \left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{-1+i}$

$\pm\sqrt{2i} = 1\pm i$

$\pm\sqrt{-2i} = -1\pm i$

$y_1 = e^{x}\cos x \qquad y_3 = e^{-x}\cos x$

$y_2 = e^{x}\sin x \qquad y_4 = e^{-x}\sin x$

$y_{g_H} = c_1e^{x}\cos x + c_2e^{x}\sin x + c_3e^{-x}\cos x + c_4e^{-x}\sin x$ #

جداً تتغير الارقام نفس الحل مثال

$y^{(4)}+9r=0$

الفرق فقط بدل $\underline{4} \rightarrow \underline{9}$

بدل $\underline{2} \rightarrow \underline{3}$

* $y''+y = 8\sin^2x$ Non Homo + (من اهم الجدولات الغريبة إذا بـ undeler) $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ متطابقة

[1] $r^2+1=0$

$r_1,r_2 = 0\pm i$

$y_1=\cos x,\ y_2=\sin x$

$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$

[2] $g(x) = 8\sin^2x$

$= 8\times\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$= 4-4\cos 2x$ لا يوجد تشابه

$y_P = A_1+A_2\cos 2x + A_3\sin 2x$

$y_g = y_c + y_p$ #

Find $w(\sin\ln x, \cos\ln x) = \begin{vmatrix} \sin(\ln x) & \cos\ln x \\ \frac{1}{x}\cos(\ln x) & -\frac{1}{x}\sin\ln x \end{vmatrix}$

$\omega = \frac{-1}{x}\sin^2\ln x - \frac{1}{x}\cos^2\ln x = \frac{-1}{x}\left(\underbrace{\sin^2\ln x+\cos^2\ln x}_{1}\right) = \frac{-1}{x}$ #

$\sin^2x+\cos^2x=1$ متطابقة

Subject: Laplace Transform — Date — No. [1]

Laplace "$\mathcal{L}$"

- Laplace Transform
- Inverse Laplace
- Unit step function
- Solve Diff using laplace

* Definition of laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

مش محول بدلالة (t) — محول وجاهز بدلالة (s)

[1] أولاً التكامل بالنسبة لـ (t)

[2] ثانياً $\mathcal{L}[f(t)] = f(t)$ داخل التكامل (نفس الاقتران)

[3] ثم معرفة التطبيق بل التعريف

Ex) $f(t) = 2$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \times 2 \cdot dt = \underbrace{\frac{2}{-s}}_{\text{ثابت}} e^{-st}\Big]_0^{\infty} = \frac{2}{-s}\left(\lim_{h\to\infty} e^{-st}\Big]_0^{h}\right)$$

$$= \frac{2}{-s}\left[\lim_{h\to\infty} e^{-sh} - 1\right] = \frac{2}{-s}(0-1) = \frac{2}{s} \quad \#$$

* أي سؤال بقدر أحله عل التعريف العام لكن بحتاج لوقت وجهد كبير
لذلك يوجد (Table) جاهز للحل عليه بشكل مباشر وأسرع
ودائماً منحاول بكل سؤال نوصل لأحد اشكال الـ (Table)

* properties of laplace

[1] $\mathcal{L}[f(t) \pm g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \pm \mathcal{L}[g(t)]$ — [1] التوزيع عل الطرح والجمع

[2] $\mathcal{L}[c f(t)] = c\,\mathcal{L}[f(t)]$ — [2] الثابت بطلع لبرا

[3] $\mathcal{L}[f(t) \times g(t)] \neq \mathcal{L}[f(t)] \times \mathcal{L}[g(t)]$ — [3] لا يوزع عل الضرب والقسمة

$f(t)$	$F(s)$
Constant "c"	$\frac{c}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

e^{at} عكس إشارة a

$\sin$ عكس $\sinh$

(في الإشارة)

$\cos$ عكس $\cosh$

Ex) $f(t) = 3t^5 - 4$ Find laplace transform ?

$$\mathcal{L}[f(t)] = 3\mathcal{L}[t^5] - \mathcal{L}[4] = 3 * \left(\frac{5!}{s^6}\right) - \frac{4}{s} \quad \#$$

* $f(t) = 3\cos 2t + e^{3t-7}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = 3\mathcal{L}[\cos 2t] + \mathcal{L}[e^{3t} \cdot e^{-7}] = 3\mathcal{L}[\cos 2t] + e^{-7}\mathcal{L}[e^{3t}]$$

$$\Rightarrow 3 * \left(\frac{s}{s^2+4}\right) + e^{-7} * \left(\frac{1}{s-3}\right) \quad \#$$

مراجعة متطابقات مهمة

[1] $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$ — تحافظ على اشارة الوسط

[2] $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$ — تعكس اشارة الوسط

[1] $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ — ضعف الزاوية

[2] $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

[1] $\sin A\cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B))$

[2] $\sin A\sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

[3] $\cos A\cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$

Ex] find laplace ?!

* $f(t) = \sinh 3t + 2\sin^2 t$

$$\mathcal{L}[\sinh 3t] + 2\mathcal{L}[\sin^2 t] = \mathcal{L}[\sinh 3t] + \cancel{2} * \frac{1}{\cancel{2}}\mathcal{L}[1 - \cos 2t]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{s^2-9} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \quad \#$$

(يجب كتابتهم بصورة القانون)

* $$\mathcal{L}[\cos 4t\sin 2t] = \mathcal{L}[\sin 2t\cos 4t] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[\sin -2t] + \mathcal{L}[\sin 6t]$$

$\mathcal{L}[-\sin 2t]$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+36}\right)$$

* $f(t) = 2^t \Rightarrow f(t) = e^{\ln 2^t} \Rightarrow e^{t*\ln 2} \Rightarrow e^{\ln 2 * t} = \frac{1}{s - \ln 2}$

* $f(t) = 3^{-t} \Rightarrow f(t) = e^{\ln 3^{-t}} \Rightarrow e^{-t*\ln 3} \Rightarrow e^{-\ln 3 * t} = \frac{1}{s + \ln 3}$

* $2\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos^2 t \, . dt$

$f(t) = 2\cos^2 t \Rightarrow \mathcal{L}f(t) = \cancel{2}\mathcal{L}\frac{1}{\cancel{2}}(1 + \cos 2t) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}$ — بدل كل اي نعوض (α) مثل السؤال

$$2\int_0^\infty e^{-\alpha t}\cos^2 t \, . dt = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2+4} \quad \#$$

* حل السؤال $2\int_0^\infty e^{-3t}\cos^2 t \, dt$ نعوض بدل (s) ب (3) فقط الفرق

Rule of laplace

(Shifting)

$\mathcal{L}[e^{\pm at} f(t)]$

$= \mathcal{L}[f(t)]\Big|_{s \to s \mp a}$ (عكس الإشارة)

$F(s)\Big|_{s \to s \mp a}$

(e^{at}) موجود

(Multiplication by t^n)

$\mathcal{L}[t^n f(t)]$

$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f(t)]\right)$ نوجد الـ laplace ثم نشتق

$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(F(s)\right)$

(t^n) موجود

$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$ (حالة قسمة)

* (laplace) لا يوزع على الضرب والقسمة بحال السؤال ورد فيه ضرب أو قسمة نفكر بـ (Rule)

Ex) $\mathcal{L}[e^{2t}\sin t]$ * حالة ضرب اذا نفكر بـ Rule حالة shift (e^{2t})

$\mathcal{L}[\sin t]\Big|_{s \to s-2} = \frac{1}{s^2+1}\Big|_{s \to s-2} = \frac{1}{(s-2)^2+1}$

* $\mathcal{L}[t^2 e^{3t}] = \mathcal{L}[t^2]\Big|_{s \to s-3} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{(s-3)^3}$

* $\mathcal{L}[3^{-t}\cos 4t] = \mathcal{L}\, e^{-\ln 3 t}\cos 4t = \mathcal{L}[\cos 4t]\Big|_{s \to s+\ln 3} = \frac{s}{s^2+16}$ ← فكرة سابقة

$= \frac{(s+\ln 3)}{(s+\ln 3)^2+16}$

* $\mathcal{L}[e^{-t}\cos^2 2t] = \mathcal{L}\, e^{-t}\frac{1}{2}(1+\cos 4t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[1+\cos 4t]\Big|_{s \to s+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+16}\right)\Big|_{s \to s+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{(s+1)}{(s+1)^2+16}\right)$

* $\mathcal{L}[t\sin t]$ * حالة ضرب إذاً (Rule) يوجد (t) إذاً (multi)

$= (-1)^1 \frac{d^{(1)}}{ds}\mathcal{L}[\sin t] = -1 * \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -1 * \frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

* $\mathcal{L}[t\cos 2t] = (-1)^1 \frac{d^{(1)}}{ds}\mathcal{L}[\cos 2t] = (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

$= -1 * \frac{s^2+4-s*2s}{(s^2+4)^2} = -1 * \frac{s^2-2s^2+4}{(s^2+4)^2} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$ #

$* \mathcal{L}[e^{-t} * t * \sin 2t]$ ① $\to$ (shift) ② $\to$ (multi)

طريقتين للحل

① shift :- $\mathcal{L}[e^{-t}\, t \sin 2t] = \mathcal{L}[t \sin 2t]\Big|_{s\to s+1} = (-1)^1 \dfrac{d^{(1)}}{ds} \mathcal{L}[\sin 2t]\Big|_{s\to s+1}$

$(-1)\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s\to s+1} = (-1) \times \dfrac{-4s}{(s^2+4)^2}\Big|_{s\to s+1} = \dfrac{4(s+1)}{\left((s+1)^2+4\right)^2}$ #

② multi :- $\mathcal{L}[t\, e^{-t} \sin 2t] = (-1)^{(1)} \dfrac{d^{(1)}}{ds} \mathcal{L}[e^{-t} \sin 2t]$

$= (-1)\dfrac{d}{ds}\left(\mathcal{L}[\sin 2t]\Big|_{s\to s+1}\right) = (-1)\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s\to s+1} = \dfrac{4(s+1)}{\left((s+1)^2+4\right)^2}$ #

$* \mathcal{L}\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]$ rule [3] $\Rightarrow$

خطوات الحل

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ [1]

[2] الاستبدال $F(s) \to F(x)$ (مكان ال (s) حط (x))

[3] تكامل $\int_s^\infty F(x)\,dx = f(s)$

Ex) $\mathcal{L}\left[\dfrac{\sin t}{t}\right] \Rightarrow$ حالة قسمة اذاً rule (3)

[1] $\mathcal{L}[\sin t] = \dfrac{1}{s^2+1}$ [2] $F(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

[3] $\int_s^\infty \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x\Big]_s^\infty \quad \lim_{h\to\infty} \tan^{-1} x\Big]_s^h = \lim_{h\to\infty} \tan^{-1} h - \tan^{-1} s$

$= \tan^{-1}\infty - \tan^{-1} s = \boxed{\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} s}$ #

$* \mathcal{L}\left[\dfrac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}\right]$ [1] $\mathcal{L}[e^{-2t} - e^{-3t}] = \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3}$

[2] $F(x) = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$ [3] $\int_s^\infty \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}\right) dx$

$\ln|x+2| - \ln|x+3|\Big]_s^\infty = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)\Big]_s^\infty = \lim_{h\to\infty} \ln \dfrac{x+2}{x+3}\Big]_s^h$

$\underbrace{\lim_{h\to\infty} \ln \dfrac{h+2}{h+3}}_{\text{zero}} - \ln\dfrac{s+2}{s+3} = \boxed{-\ln\dfrac{s+2}{s+3}}$ #

$\ln\left(\lim_{h\to\infty} \dfrac{h+2}{h+2}\right) = \ln\left(\lim_{h\to\infty} 1\right) = \ln 1 = 0$

الدرجة اكبر بالبسط

اكل درجة نا تالت

Subject Date No. 6

*** special Rule:-**

$$\mathcal{L}[t^{(\text{كسر})}] = \mathcal{L}[t^{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \dots}]$$

$\Rightarrow$ Rule:- $\mathcal{L}[t^{n-\frac{1}{2}}] = \dfrac{-(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n \cdot s^{n+\frac{1}{2}}}$ (حفظ)

Find $\mathcal{L}[\sqrt{t}]$

$= \mathcal{L}[t^{\frac{1}{2}}] =$ $\boxed{n-\frac{1}{2} = (\text{الأس})}$ بهمني قيمة (n) في لوجدتا من مساواة

$n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{n=1}$ من ثم بحل القانون مباشرة

$$\frac{-(2\times1-1)\sqrt{\pi}}{2^1 \cdot s^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{-\sqrt{\pi}}{2 \cdot s^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}$$

*** $\mathcal{L}\left[\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\right]$** $= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\, t^{\frac{1}{2}}}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\right]$ عوض بدل n بالقانون

$n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\boxed{n=0}$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}[t^{-\frac{1}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}\right)$

$= \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{s}}}$ #

N O T E B O O K

النوع الثاني من laplace ["$\mathcal{L}^{-1}$" Laplace Inverse]

- **Table** (جاهز)
- **Partial fraction** (كسور جزئية)
  - * درجة المقام > درجة البسط
  - * المقام يحلل
- **Complet square** (إكمال مربع)
  - * درجة المقام > البسط
  - * المقام لا يتحلل

* Laplace Inverse "$\mathcal{L}^{-1}$" ⇒ السؤال بدلالة (s) بدنا نحوله لـ (t)

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+16}\right]$ (Table)

$= \boxed{\sin 4t}$

عند شكل sin لكن بنقصها $\sqrt{3}$ فنضرب ونقسم عليه

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2+3}\right] = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3}\right] = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right] = \boxed{\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t}$

كتوزيع المقام على البسط

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s^2-4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2-4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4}\right] = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-4}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1*2}{s^2-4}\right]$

$= 2\cosh 2t + \frac{1}{2}\sinh 2t$

(s-3) بتذكرني بـ (shift) بحول (s-3 ← s) وبعمل العكس $\boxed{s \to s+3}$

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{(s-3)^2+4}\right] = 2\,\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s-3)^2+4} - \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s-3)^2+4} \overset{(shift)}{=} 2e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\frac{(s+3)}{(s+\cancel{3}-\cancel{3})^2+4} - e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+\cancel{3}-\cancel{3})^2+4}$

$= e^{3t}2\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+4}\right]\right) - e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = e^{3t}2\left(\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right) - \frac{e^{3t}}{2}\sin 2t$

$\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1*2}{s^2+4}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{1*2}{s^2+4}$

* حال الشوف ($s \pm \boxed{9}$) إعرف انه فيه (shift) e^{9t} (القوة)

← عكس الإشارة (تذكر)

(العكس) e^{-3t} إذا shift $\underline{(s+3)^2}$ بدل كل $[s \to s+3]$

* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+3)^2}\right] = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{(s-\cancel{3+3})^2} = 2e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left[\underset{(\text{Table})}{\frac{1}{s^2}}\right] = 2e^{-3t}t$

- Partial fraction (درجة البسط < درجة المقام) $\frac{A}{\text{linear}}$ (إذا المقام كلل) | $\frac{As+B}{\text{المعادلة (مربوعي)}}$ (إذا المقام لا يكلل)

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s^2+4s-5}\right]$ → Partial: (كلل) b^2-4ac ; $16-4*1*-5=20$ ثانيا (جاهز) Table أولا مش

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{(s+5)(s-1)}\right] = \frac{2s+1}{(s+5)(s-1)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s+5)}+\frac{B}{(s-1)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2s+1}{(s+5)(s-1)} = \frac{A(s-1)}{(s+5)} + \frac{B(s+5)}{(s-1)} \Rightarrow 2s+1 = A(s-1)+B(s+5)$$

$\boxed{s=1} \Rightarrow 3 = 6B \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{2}}$

$\boxed{s=-5} \quad -9=-6A \Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{2}}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{3}{2}}{s+5}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s-1}\right] = \boxed{\frac{3}{2}e^{-5t} + \frac{1}{2}e^{t}} \quad \#$$

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2(s^2+5s+6)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{s^2(s+3)(s+2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+3}+\frac{D}{s+2}\right]$

الجواب مع كامل الثوابت $\Rightarrow At^0 + Bt + Ce^{-3} + De^{-2}$

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s^2+9)(s^2+4)}\right]$ أسرع $\left(\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\right)$ طريقة حل ثانية بدل *

$s^2+9-s^2-4=$

$s^2+9-(s^2+4) = \underline{\underline{5}}$ ⟸ لطرح التام مع بعض #

$$\frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\frac{(s^2+9)-(s^2+4)}{(s^2+9)(s^2+4)} = \frac{3}{5}\left(\mathcal{L}^{-1}\frac{\cancel{(s^2+9)}}{\cancel{(s^2+9)}(s^2+4)} - \mathcal{L}^{-1}\frac{\cancel{s^2+4}}{(s^2+9)\cancel{(s^2+4)}}\right)$$

لأنه ناتج الطرح $\underline{\underline{5}}=$ عشان احافظ على المساواة وما اغير السؤال

$$\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1*2}{s^2+4}\right] - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1*3}{s^2+9}\right]\right)$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\sin 3t\right) \quad \#$$

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3+s}\right]$ مش (Table) المقام ٢ البسط مثل إذاً (Partial)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s)} + \frac{Bs+c}{(s^2+1)}\right] \Rightarrow \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A(s^2+1)+Bs+c(s)}{s(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow 1 = A(s^2+1) + Bs + c(s)$$

$\boxed{s=0} \Rightarrow \boxed{A=1}$ $\quad \boxed{s=1} \Rightarrow 1 = 2+B+c \Rightarrow \boxed{B+c=-1}$

$\boxed{s=-1} \Rightarrow 1 = 2-B+c \Rightarrow \boxed{-B+c=1}$ $\quad \ominus \; B+c=-1$, $\; -B+c=1$

$\boxed{B=-1} \Rightarrow \boxed{c=0}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \boxed{1-\cos t} \; \#$$

- Completing squre $\Rightarrow$ المقام ٢ البسط والمقام لا يحلل *

* خطوات إكمال المربع بجمع وبطرح مقدار $\left(\frac{\text{معامل } s}{2}\right)^2$

التأكد من أن معامل $s^2 = 1$ قبل البدء

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+4}\right]$ $\quad b^2-4ac = 4-4\times4 = -12 < 0$ (لا يحلل)

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+1-1+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+3}\right] \qquad \text{shift } (s+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\frac{1\times\sqrt{3}}{s^2+3} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t \; \#$$

* دائماً الربط (Complet) مع shift (e^{at})

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s^2+4s+10}\right]$ $\quad = 16-4\times2\times10 < 0$ (Complet $\therefore$)

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(s^2+2s+5)}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+1-1+5}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+4}\right]$$

shift

بدل كل $s \leftarrow s-1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\times2}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\frac{1\times2}{s^2+4} = \frac{e^{-t}}{4}\sin 2t$$

* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-s}\right]$ أحل طريقتين إما (Complete) OR (Partial)

(1) * $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-s+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right] = \frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1 * \frac{1}{2}}{s^2-\frac{1}{4}}\right] = \boxed{2e^{\frac{1}{2}t}\sinh\frac{1}{2}t}$ #

$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

(2) * $\frac{1}{s^2-s} = \frac{A}{(s)} + \frac{B}{(s-1)} \Rightarrow \frac{1}{s^2-s} = \frac{A(s-1)+B(s)}{(s-1)(s)}$

$1 = A(s-1) + B(s)$

$\boxed{s=1} \Rightarrow \boxed{B=1}$ $\boxed{s=0} \Rightarrow \boxed{A=-1}$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = \boxed{-1+e^t}$ #

نفس الجواب بعد التبسيط #

* Rule خاصة

(1) $\mathcal{L}^{-1}[\tan^{-1}(F(s))]$, $\mathcal{L}^{-1}[\ln(F(s))]$ القاعدة $\rightarrow f(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]$ (مشتقة)

(2). $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ (لتتخلص منه إذا طلع منه مجاهيل a, b, ...)

إذا الـ $\boxed{\lim = \text{zero}}$ يكون الـ laplace إذا لا ✗ ما يقبل الـ laplace)

(3) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

Ex) $\mathcal{L}^{-1}[\tan^{-1}s] = F(s) = \tan^{-1}s \Rightarrow F'(s) = \frac{1}{s^2+1}$ مشتقة طاطاره (tan)

$\frac{1}{1+(\text{ظاطا})^2}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \boxed{\frac{-\sin t}{t}}$ #

الأصل للاشتقاق

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\tan^{-1}\frac{3}{s}\right] = F(s) = \tan^{-1}3s^{-1} \Rightarrow F'(s) = \frac{-3s^{-2}}{1+9s^{-2}} \frac{* s^2}{* s^2}$ لتخلص من s^{-2}

$f(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\frac{-3}{s^2+9} = \boxed{\frac{\sin 3t}{t}}$ #

Ex) $\mathcal{L}^{-1}[\ln(s+3)] \Rightarrow F(s) = \ln(s+3) \quad F'(s) = \frac{1}{s+3}$

$f(t) = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = \boxed{\frac{-e^{-3t}}{t}}$ #

خصائص الـ (ln) أسهل للاشتقاق

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\frac{s-2}{s+1}\right] \quad F(s) = \ln|s-2| - \ln|s+1| \; / \; F'(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$

$f(t) = \frac{-1}{t}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\right) = \frac{-1}{t}\left(e^{2t} - e^{-t}\right)$

$F(s) = \frac{3s - 2s^2(1+as) + 6s^3}{s^3+8}$ Find a ? $\quad \mathcal{L}^{-1}F(s) = f(t)$

(أكبر درجة في البسط لأكبر درجة في المقام) $\quad$ نعرف منها أن النهاية = zero

$F(s) = \frac{3s - 2s^2 - 2s^3a + 6s^3}{s^3+8} = \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s^3}(-2a+6)}{\cancel{s^3}} = 0$

(ثابت)

$-2a + 6 = 0 \quad \therefore \boxed{a = 3}$ $\quad$ نهاية الثابت = الثابت نفسه

Ex) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ Find a, b ?!

$F(s) = \frac{as}{s+1} - \frac{s^2-1}{s^2+1} + \frac{e^{bs}}{s+1}$

$\lim_{s\to\infty} \frac{as}{s+1} - \frac{s^2-1}{s^2+1} + \frac{e^{bs}}{s+1} = 0$ $\qquad \lim_{s\to\infty} \frac{e^{bs}}{s+1} = \begin{cases} 0 , & b \leq 0 \\ \infty , & b > 0 \end{cases}$

$\lim_{s\to\infty} \frac{a\cancel{s}}{\cancel{s}} - \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s^2}}{\cancel{s^2}} + \lim_{s\to\infty} \underbrace{\frac{e^{bs}}{s+1}}_{\text{zero}} = 0$ إكسبوننشيال

$\therefore \boxed{b \leq 0} \qquad a - 1 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$ #

Ex) $\mathcal{L}[f(4t)] = \frac{1}{4}F\left(\frac{s}{4}\right)$

Ex) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $F(1) = 10$, $F(2) = 12$ Find $\mathcal{L}[f(3t)]$

$s = 6$

$\mathcal{L}[f(3t)] = \frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}F\left(\frac{6}{3}\right) = \frac{1}{3}F(2)$

$= \frac{1}{3} * 12 = 4$ #

تكرار $u_a t = u(t-a)$

*** Unit step function $u(t)$ / $u_a t$ (laplace)** النوع الثالث من

* $\mathcal{L}[u(t-a)] = \dfrac{e^{-as}}{s}$ (نفس الاشارة)

بدون المشتقة كل (s)

* $\mathcal{L}[u(t-a) \times f(t)] = e^{-as}\,\mathcal{L}[F(t+a)]$

كالة laplace العادي $(t+a)$

* $\mathcal{L}^{-1}[e^{-as} F(s)] = u(t-a)\,\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\Big|_{t \to t-a}$ كالة Inverse laplace $(t-a)$

استدل كل invers العادي من (invers) unit من خلال (e^{s}) بغض النظر عن الرقم مع (s)

Ex) $\mathcal{L}[u(t-2)] = \dfrac{e^{-2s}}{s}$

$\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{e^{0s}}{s} = \dfrac{1}{s}$

أول اشي بخلص من unit

Ex) $\mathcal{L}[u(t-3)(3t+1)] = e^{-3s}\,\mathcal{L}[3t+1]\Big|_{t \to t+3} = e^{-3s}\,\mathcal{L}[3(t+3)+1]$

$\Rightarrow e^{-3s}\,\mathcal{L}[3t+10] = e^{-3s}\left(\dfrac{3}{s^2} + \dfrac{10}{s}\right)$

(متطابقة)

$\mathcal{L}[\sin t\, u(t-\pi)] = e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[\sin t]\Big|_{t \to t+\pi} = e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[\sin(t+\pi)]$

$\Rightarrow e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[\sin t \overset{-1}{\cos\pi} + \cancel{\sin\pi}\cos t] = -e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[\sin t] = \dfrac{-e^{-\pi s}}{s^2+1}$

zero

(ثابت)

$\mathcal{L}[u(t-\pi)\,e] = e\,\mathcal{L}[u(t-\pi)] = e \times \dfrac{e^{-\pi s}}{s} = \dfrac{e^{1-\pi s}}{s}$

$\mathcal{L}[u(t-\pi)\,e^{5t}] = e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[e^{5t}]\Big|_{t \to t+\pi} = e^{-\pi s}\,\mathcal{L}[e^{5(t+\pi)}] = e^{-\pi s} e^{5\pi}\,\mathcal{L}[e^{5t}]$

$= e^{5\pi - \pi s}\left(\dfrac{1}{s-5}\right)$

اول شيء بتخلص من e^{-2s} من خلال $\underline{u(t-2)}$

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right] = u(t-2)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = u(t-2)\, t\Big|_{t\to t-2} = u(t-2)(t-2)$

فكفكة

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\right] = u(t-\frac{\pi}{2})\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = u(t-\frac{\pi}{2})\left(\sin t\Big|_{t\to t-\frac{\pi}{2}}\right) = u(t-\frac{\pi}{2})\,\underline{\sin(t-\frac{\pi}{2})}$

$u(t-\frac{\pi}{2})\left(\sin t \cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,zero} - \cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{\,1} \cos t\right) = -u(t-\frac{\pi}{2}) \cos t$

$4 = (\frac{4}{2})^2$ (Complet) إذا المقام لا يحلل، اكمل المقام

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s e^{-3s}}{s^2+4s+5}\right] = u(t-3)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4s+5}\right] = u(t-3)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4s+4-4+5}\right]$

$u(t-3)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)^2+1}\right] = u(t-3)\, e^{-2t}\Big|_{t\to(t-3)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{s^2+1}\right]$

(shift)

$= u(t-3)\, e^{-2(t-3)}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+1}\right]\right) = u(t-3)\, e^{-2t+6}\left(\cos t - 2\sin t\right)\Big|_{t\to t-3}$

$= u(t-3)\, e^{-2t+6}\left(\cos(t-3) - 2\sin(t-3)\right)$ #

النوع الثاني من استعمالات ال (unit) هي الاقترانات المتشعبة $\underline{\text{مثال}}$

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t < a \\ q(t), & a \le t < b \\ h(t), & t \ge b \end{cases}$$

مشترك

find $\mathcal{L}[g(t)]$

نحول لمعادلة عادية ثم نأخذ laplace للطرفين

$g(t) =$ الاقتران العادي $+$ (الثاني - الأول) $u($المشترك$)$ $+$ (الثالث - الثاني) $u($المشترك$)$

$g(t) = f(t) + \big(q(t) - f(t)\big)\, u(t-a) + \big(h(t) - q(t)\big)\, u(t-b)$

(ثم نأخذ ال (laplace) للطرفين)

Subject Date No. 14

Ex) $f(t) = \begin{cases} 1 & , 1<t<2 \\ 3 & , 2<t<3 \\ 6 & , t>3 \end{cases}$ Find $\mathcal{L}[f(t)]$?!

$$f(t) = 1 + (3-1)u(t-2) + (6-3)u(t-3)$$

$$f(t) = 1 + 2u(t-2) + 3u(t-3)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1] + 2\mathcal{L}[u(t-2)] + 3\mathcal{L}[u(t-3)]$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{3e^{-3s}}{s} = \frac{1}{s}\left(1 + 2e^{-2s} + 3e^{-3s}\right)$$

$f(t) = \begin{cases} t & , 0<t<1 \\ 1 & , 1<t<2 \\ 3-t & , 2<t<3 \\ 0 & , t>3 \end{cases}$ Find $\mathcal{L}[f(t)]$

$$f(t) = t + (1-t)u(t-1) + (3-t-1)u(t-2) + (0-(3-t))u(t-3)$$

$$f(t) = t - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t] - \mathcal{L}[(t-1)u(t-1)] - \mathcal{L}[(t-2)u(t-2)] + \mathcal{L}[(t-3)u(t-3)]$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\mathcal{L}t - e^{-2s}\mathcal{L}t + e^{-3s}\mathcal{L}t$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s^2} = \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}\right)$$

Ex) $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-3s}\left(\frac{6}{s^2} - \frac{5}{s-2}\right)\right]$

سؤال بالعكس معطيك المعادلة حوله لتشعيب

أول اشي نطلع (الأُس)

$$\Rightarrow u(t-3)\left(\mathcal{L}^{-1}\frac{6}{s^2} - \mathcal{L}^{-1}\frac{5}{s-2}\right)$$

$$u(t-3)\left(6t\Big|_{t\to t-3} - 5e^{2t}\Big|_{t\to t-3}\right)$$

$$= u(t-3)\left(6(t-3) - 5e^{2(t-3)}\right) = u(t-3)\left(6t - 18 - 5e^{2t-6}\right)$$

NOTEBOOK

بما أن الحد $u(t-3)\left(6t-18-5e^{2t-6}\right)$ يحتوي على (unit) إذاً متصل

يكون أول حد (لأن أول حد منزله عادي) إذاً أول حد = zero

وبما أن $u(t-3)$ $(a=3)$ إذاً مشعب عند 3

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<3\\ 6t-18-5e^{2t-6}, & t>3\end{cases}$$ #

Ex) $f(t)=\begin{cases}0, & t<2\\ t^2, & t\geq 2\end{cases}$ Find $\mathcal{L}[f(t)]$?!

(نفصلها تربيع)

$(A\mp B)^2=A^2\mp 2AB+B^2$ فك التربيع

$f(t)=0+(t^2-0)\,u(t-2)$

$f(t)=t^2\,u(t-2)$

$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}\left[u(t-2)\,t^2\right]=e^{-2s}\,\mathcal{L}\left[t^2\right]\Big|_{t+2}=e^{-2s}\,\mathcal{L}\left[(t+2)^2\right]$

$\Rightarrow e^{-2s}\,\mathcal{L}\left[t^2+4t+4\right]=e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}\right)$ #

Subject Date No. 16

* Solve Diff using laplace

النوع الأخير

نستخدم الـ laplace لتحويل المعادلة التفاضلية الى معادلة جبرية (نقتل المشتقات)

1) $\mathcal{L}[y(t)] = y(s)$

2) $\mathcal{L}[y'(t)] = s\,y(s) - y(0)$

3) $\mathcal{L}[y''(t)] = s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0)$

4) $\mathcal{L}[y'''(t)] = s^3 y(s) - s^2 y(0) - s\,y'(0) - y''(0)$

لتسهيل الحفظ

* نبدأ بـ (s) درجتها تساوي درجة المشتقة المطلوبة ونبدأ بتقليلها تدريجياً
* ننتهي بدرجة مشتقة اقل من الدرجة المطلوبة
* أول حد $y(s)$ والباقي $y(0)$
* بين كل حد وحد (ناقص)

Ex) use the Laplace transform to solve the IVP

$$y'' - y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \ , \ y'(0) = -1$$

1) أولاً نأخذ (laplace) للطرفين

$$\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0]$$

2) ثانياً نعوض (IVP)

$$s^2 y(s) - s\,y(0) - y'(0) - (s\,y(s) - y(0)) - 6\,y(s) = 0$$

3) نرتب الحدود ونأخذ $y(s)$ عامل مشترك

$$s^2 y(s) - s*2 + 1 - (s\,y(s) - 2) - 6\,y(s) = 0$$

$$s^2 y(s) - 2s + 3 - s\,y(s) - 6\,y(s) = 0$$

$$y(s)(s^2 - s - 6) = 2s - 3$$

4) نجعل $y(s)$ موضوعاً للقانون

$$y(s) = \frac{2s-3}{s^2-s-6}$$

5) نأخذ Laplace Invers للطرفين لإيجاد $y(t)$

البسط والمقام = الكسور الجزئية (Partial)

$$\mathcal{L}^{-1} y(s) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-3}{s^2-s-6}\right]$$

$$\frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{A}{(s-3)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$A(s+2) + B(s-3) = 2s-3$$

$$s = -2 \Rightarrow \boxed{B = \frac{7}{5}}$$

$$s = 3 \Rightarrow \boxed{A = \frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{\frac{3}{5}}{s-3} + \mathcal{L}^{-1}\frac{\frac{7}{5}}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{7}{5}e^{-2t}} \ \#$$

Ex) $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2t}$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 3$

1) $\mathcal{L}[y''] - 6\mathcal{L}[y'] + 5\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}\, e^{2t}$

$s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) - 6(s y(s) - y(0)) + 5y(s) = \frac{3}{s-2}$

$s^2 y(s) - 2s - 3 - 6s y(s) + 12 + 5y(s) = \frac{3}{s-2}$

$y(s)(s^2 - 6s + 5) = \frac{3}{s-2} + \frac{2s-9(s-2)}{(s-2)}$ (توحيد مقامات)

$y(s) = \frac{3 + 2s - 9(s-2)}{(s^2 - 6s + 5)(s-2)}$

(Partial)

$\Rightarrow \frac{3 + (2s-9)(s-2)}{(s-1)(s-5)(s-2)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-5)}$

$3 + (2s-9)(s-2) = A(s-2)(s-5) + B(s-1)(s-5) + C(s-2)(s-1)$

$\boxed{s=1} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

$\boxed{s=2} \Rightarrow B = -1$

$\boxed{s=5} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$\mathcal{L}^{-1} y(s) = \mathcal{L}^{-1}\frac{\frac{5}{2}}{s-1} - \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s-2} + \mathcal{L}^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{(s-5)}$

$\boxed{y(t) = \frac{5}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{5t}}$ #

Ex) Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right]$

* فكرة سؤال مهمة (حالة خاصة)

(multiplication) نفضل قاعدة

أولاً نشوف Table & Partial (الكل) & Complet

ثانياً نروح (shift)

الفكرة انه احسب التربيع من المشتقة

$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

$\mathcal{L}(-1)^n t^n f(t) = F^{(n)}(s)$

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-1)^n t^n f(t)$

$\left(\frac{1}{s^2+4}\right)' = \frac{-2s}{(s^2+4)^2}$ $= F'(s) = \frac{-2s}{(s^2+4)^2}$

$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -2\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+4)^2}$

فرضت $F(s) = \frac{1}{s^2+4}$

$\mathcal{L}^{-1}F(s) = f(t)$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+4}$

$f(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$

(الشتق مرة) $\frac{(-1)^1 t^{(1)} f(t)}{-2} = \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+4)^2}$

$\frac{\frac{1}{2} t \sin 2t}{2} = \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+4)^2}$

$\boxed{\therefore \mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+4)^2} = \frac{t}{4}\sin 2t}$ #

NOTEBOOK